Лекція № 10

Тема: Перша квадратична форма поверхні

Література:

1. Атанасян Л.С. Геометрия / Л.С. Атанасян, В.Т, Базылев. Ч.II. – М.: Просвещение, 1987. – 332 с.

2. Синюков Н.С. Топология / Н.С. Синюков, Т.И. Матвиенко. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. – 264 с.

План лекції

1. Означення першої квадратичної форми поверхні.
2. Обчислення довжини дуги лінії на поверхні.
3. Обчислення косинуса кута між лініями на поверхні.
4. Ознака ортогональності координатної сітки.
5. Обчислення площі компактної поверхні.

Короткий зміст лекції: виведення першої квадратичної форми; поняття обчислення довжини дуги лінії на поверхні; формула довжини дуги на поверхні; поняття кута між дотичними в точці; виведення формули для обчислення площі компактної поверхні; поняття ортогональності координатної сітки.

Основні поняття лекції:

Нехай задана гладка поверхня F_0 рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v).$$

Як відомо диференціал в точці $M \epsilon F_0$ має вид :

$$d\vec{r} = \overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv.$$

Піднесемо рівність до скалярного квадрату, тоді отримуємо

$$(d\vec{r})^2 = \overrightarrow{r_u}^2(du)^2 + 2\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v}\,dudv + \overrightarrow{r_v}^2(dv)^2.$$

Введемо такі позначення : $\gamma_{11} = \overrightarrow{r_u}^2,\ \gamma_{12} = \overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v},\ \gamma_{22} = \overrightarrow{r_v}^2$, тоді рівність

$d\vec{r} = \overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv$ буде мати такий вид :

$$(d\vec{r})^2 = \gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2.$$

Права частина рівності називається *першою квадратичною формою поверхні* F_0 або її *лінійним елементом.* Відмітимо, що коефіцієнти квадратичної форми є функції від u та v.

Нехай на поверхні F_0, яка задана рівнянням $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, задана гладка лінія γ: $u = u(t),\ v = v(t)$, де $t \in I$. Лінія γ у просторі задається рівнянням $\vec{r} = \vec{r}\big(u(t), v(t)\big)$. Продиференцюємо його по параметру t:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{r_u}\frac{du}{dt} + \overrightarrow{r_v}\frac{dv}{dt}.$$

Відмітимо, що $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$, де s –довжина дуги γ. Отже, з $\frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{r_u}\frac{du}{dt} + \overrightarrow{r_v}\frac{dv}{dt}$ випливає

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

З формули маємо

$$(ds)^2 = \gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2,$$

тобто *значення першої квадратичної форми поверхні є квадрат диференціала довжини дуги гладкої лінії, яка лежить на поверхні, при нескінченно малому зміщенні точки вздовж цієї лінії.*

З рівності $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$ отримуємо формулу довжини дуги на поверхні:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\gamma_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\gamma_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \gamma_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2},$$

де $t_1 < t_2$ $і$ $M_1(t_1), M_2(t_2)$ −кінці дуги.

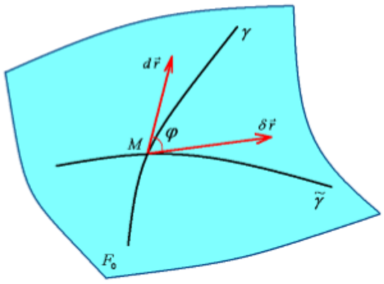

Рис.10.1

Нехай $\gamma, \tilde{\gamma}$ − дві гладкі лінії на поверхні F_0, які проходять через точку M. *Кутом між лініями* γ *та* $\tilde{\gamma}$ називається кут між їх дотичними в точці M. Нехай d $і$ δ − символи диференціювання вздовж ліній γ і $\tilde{\gamma}$. Тоді $d\vec{r}$ та $\delta\vec{r}$ – вектори дотичних до ліній γ і $\tilde{\gamma}$ в точці M. Позначимо через φ кут між γ і $\tilde{\gamma}$, тоді, очевидно, $\varphi = (\widehat{d\vec{r}, \delta\vec{r}})$, тому

$$\cos\varphi = \frac{d\vec{r}, \delta\vec{r}}{|d\vec{r}||\delta\vec{r}|}.$$

Але $d\vec{r} = \overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv$, $\delta\vec{r} = \overrightarrow{r_u}\delta u + \overrightarrow{r_v}\delta v$, тому підставляючи ці значення в формулу будемо мати :

$$\cos\varphi = \frac{\gamma_{11}du\delta u + 2\gamma_{12}(du\delta v + dv\delta u) + \gamma_{22}dv\delta v}{\sqrt{\gamma_{11}(du)^2 + 2\gamma_{12}dudv + \gamma_{22}(dv)^2}\sqrt{\gamma_{11}(\delta u)^2 + 2\gamma_{12}\delta u\delta v + \gamma_{22}(\delta v)^2}}$$

Якщо $\gamma - u$ −лінія (тобто $dv = 0$), $\tilde{\gamma} - v$ −лінія (тобто $\delta u = 0$), то формула набуває вигляд :

$$\cos\varphi = \frac{\gamma_{12}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}}}.$$

З рівності випливає, що для того щоб координатна сітка на поверхні була ортогональною ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), необхідно і достатньо, що в кожній точці цієї поверхні виконувались рівність $\gamma_{12} = 0$.

Нехай $F -$ поверхня з краєм, яка задовольняє умови :

1. F гомеоморфна замкненому кругу;
2. F є частина деякої гладкої поверхні Ф;
3. край поверхні F є кусочно-гладка лінія.

З курсу математичного аналізу відомо, що F квадровна, тобто має площу. Нехай в прямокутній системі координат O_{xyz} задана поверхня рівнянням $z = f(x, y)$, де $(x, y) \epsilon D$ в площині O_{xy} i D гомеоморфна замкненому кругу. Тоді площа $S(F)$ поверхні, як відомо, обчислюється за формулою :

$$S(F) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2}\, dxdy.$$

Якщо F задана параметричними рівняннями

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = y(u, v),$$

то, площа поверхні обчислюється за формулою :

$$S(F) = \iint_G \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}\, dudv,$$

де $G -$ відповідна поверхні F область зміни параметрів u i v .

Якщо $\vec{r}(u, v)$ –векторна функція з координатами $x(u, v), y(u, v), y(u, v),$ то в кожній точці (u, v) поверхні F виконується рівність :

$$\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = |[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]|.$$

Доведемо. Справді, якщо $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}})$, то

$$|[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]| = |\overrightarrow{r_u}||\overrightarrow{r_v}| \sin \varphi = |\overrightarrow{r_u}||\overrightarrow{r_v}|\sqrt{1 - cos^2\varphi} = \sqrt{\gamma_{11}}\sqrt{\gamma_{22}}\sqrt{1 - \frac{\gamma_{12}^2}{\gamma_{11}\gamma_{22}}}$$

$$= \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}$$

Таким чином, з $S(F) = \iint_G \sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}\, dudv$ маємо, що

$$S(F) = \iint_G |[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]|\, dudv.$$

Висновок. Знаючи першу квадратичну форму поверхні ми можемо :

1. обчислити довжину дуги на поверхні;
2. обчислити кут між лініями на поверхні;
3. обчислити площу гладкої компактної поверхні.

Лекція № 11

Тема: Кривина кривої на поверхні. Друга квадратична форма поверхні

Література:

1. Атанасян Л.С. Геометрия / Л.С. Атанасян, В.Т, Базылев. Ч.II. – М.: Просвещение, 1987. – 332 с.

2. Синюков Н.С. Топология / Н.С. Синюков, Т.И. Матвиенко. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. – 264 с.

План лекції

1. Одиничний вектор нормалі до поверхні.
2. Друга квадратична форма поверхні.
3. Нормальна кривина лінії на поверхні.
4. Індикатриса кривини поверхні.
5. Еліптичні, гіперболічні та параболічні точки поверхні.

Короткий зміст лекції: виведення формули для обчислення одиничного вектора до поверхні, другої квадратичної форми; поняття нормальної кривини лінії, абсолютної величини нормальної кривини; означення індикатриси Дюпена; введення індикатриси Дюпена в афінну систему координат; еліптичні, гіперболічні та параболічні точки поверхні, за яких умов вони визначаються .

Основні поняття лекції:

Нехай $F_0 -$ гладка елементарна поверхня класу C^k, де $k \geq 3$, яка задана рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v),$$

а γ −гладка лінія на цій поверхні. При зміщені точки M по цій лінії маємо, що $d\vec{r} = \overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv.$

Звідси отримуємо другий диференціал :

$$d^2\vec{r} = \overrightarrow{r_{uu}}\,(du)^2 + 2\overrightarrow{r_{uv}}\,dudv + \overrightarrow{r_{vv}}\,(dv)^2 + \overrightarrow{r_u}d^2u + \overrightarrow{r_v}d^2v,$$

де $\overrightarrow{r_{uu}} = \frac{d^2\vec{r}}{du^2}$, $\overrightarrow{r_{vv}} = \frac{d^2\vec{r}}{dv^2}$,$\overrightarrow{r_{uv}} = \frac{d^2\vec{r}}{dudv}$.

Відомо, що довжина вектора нормалі $\vec{N} = [\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]$, згідно формули $\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2} = |[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]|$ дорівнює $\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}$, де $\gamma_{11} = \overrightarrow{r_u}^2$, $\gamma_{12} = \overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v}$, $\gamma_{22} = \overrightarrow{r_v}^2$. Отже, *одиничний вектор* $\vec{n}$ вектора нормалі буде таким :

$$\vec{n} = \frac{[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}.$$

Оскільки $\vec{n}$ ортогональний до векторів $\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}$, то маємо :

$$\vec{n}d^2\vec{r} = \vec{n}\,\overrightarrow{r_{uu}}\,(du)^2 + 2\vec{n}\,\overrightarrow{r_{uv}}\,dudv + \vec{n}\,\overrightarrow{r_{vv}}\,(dv)^2.$$

Введемо тепер такі позначення: $b_{11} = \vec{n}\,\overrightarrow{r_{uu}}$, $b_{12} = b_{21} = \vec{n}\,\overrightarrow{r_{uv}}$,$b_{22} = \vec{n}\,\overrightarrow{r_{vv}}$,

тоді, врахувавши рівність $\vec{n} = \frac{[\overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v}]}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2}}$, ми можемо записати:

$$b_{11}=\frac{\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v}\,\overrightarrow{r_{uu}}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}},b_{12}=b_{21}=\frac{\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v}\,\overrightarrow{r_{uv}}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}},b_{22}=\frac{\overrightarrow{r_u}\,\overrightarrow{r_v}\,\overrightarrow{r_{vv}}}{\sqrt{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}^2}}.$$

Отже, $\vec{n}d^2\vec{r}=\vec{n}\,\overrightarrow{r_{uu}}\,(du)^2+2\vec{n}\,\overrightarrow{r_{uv}}\,dudv+\vec{n}\,\overrightarrow{r_{vv}}\,(dv)^2$ тепер перепишемо так:

$$\vec{n}d^2\vec{r}=b_{11}(du)^2+2b_{12}dudv+b_{22}(dv)^2.$$

Права частина рівності називається *другою квадратичною формою поверхні.*

Нехай лінія γ на поверхні $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ задана рівняннями

$$u=u(s),\qquad v=v(s),$$

де $s-$ природній параметр. Знайдемо одиничний вектор $\vec{r}$ до γ в точці M:

$$\vec{r}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\overrightarrow{r_u}\,\frac{du}{ds}+\overrightarrow{r_v}\,\frac{dv}{ds}.$$

За першою формулою Френе $\frac{d\vec{r}}{ds}=k\vec{v}$, де $k-$кривина, $\vec{v}-$ одиничний вектор головної нормалі лінії γ в точці M. Отже, продиференціювавши рівність $\vec{r}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\overrightarrow{r_u}\,\frac{du}{ds}+\overrightarrow{r_v}\,\frac{dv}{ds}$ по s, ми будемо мати :

$$k\vec{v}=\overrightarrow{r_{uu}}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\,\overrightarrow{r_{uv}}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+\overrightarrow{r_{vv}}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\overrightarrow{r_u}\frac{d^2u}{ds^2}+\overrightarrow{r_v}\frac{d^2v}{ds^2}.$$

Помножимо тепер рівність скалярно на вектор $\vec{n}$:

$$\vec{n}(k\vec{v})=\frac{b_{11}(du)^2+2b_{12}dudv+b_{22}(dv)^2}{ds^2}.$$

Введемо позначення $k_n=\vec{n}(k\vec{v})$. Число k_n називається *нормалю кривини лінії $\gamma\subset F_0$ в точці M*. Оскільки вектори $\vec{n},\vec{v}$ одиничні, то $k_n=\vec{n}(k\vec{v})=k(\vec{n}\vec{v})=k\,\cos\theta$, де $\theta=(\widehat{\vec{n},\vec{v}})$.

Якщо γ *−нормальний переріз* поверхні, тобто переріз F_0 площиною, яка проходить через нормаль і точку M, то, очевидно, $\overrightarrow{n}=\vec{v}$, або $\overrightarrow{n}=-\vec{v}$.

В першому випадку $k_n = k$, а в другому $k_n = -k$. Отже, абсолютна величина нормальної кривини нормального перерізу дорівнює кривині цього перерізу в точці М.

Нормальна кривина лінії $\gamma \subset F_0$ *в точці* M *залежить тільки від напрямку дотичної*. Таким чином, всі гладкі лінії поверхні, які проходять через точку М і мають в ній спільну дотичну, мають в точці М одну і ту ж нормальну кривину.

Встановимо зв'язок між нормальними кривинами ліній на поверхні F_0, які проходять через точку M і мають різні дотичні. В дотичній площині до поверхні в точці M розглянемо пучок прямих Ω з центром M. На кожній з цих прямих від точки M в обидві сторони відкладемо відрізки довжиною $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$, де k_n −відмінна від нуля нормальна кривина лінії на поверхні, для якої дана пряма є дотичною. Лінія, яка з'єднує кінці відкладених відрізків, називається *індикатрисою кривини поверхні (або індикатрисою Дюпена)* в точці M.

Рівняння $b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 = \pm 1$ є окремим випадком загального рівняння лінії другого порядку, а тому, як було показано при вивчені цієї теми в аналітичній геометрії, дане рівняння визначає :

1. Еліпс, якщо $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$. В цьому випадку M називається *еліптичною точкою* поверхні F_0. Якщо даний еліпс є коло, то M називається *омбілічною точкою.*
2. Пару спряжених гіпербол, якщо $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$. Тоді M називається *гіперболічною точкою.*
3. Дві паралельні прямі, коли $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$. Точка M в даному разі називається *параболічною* точкою поверхні F_0.

Лекція № 12

Тема: Головні кривини. Повна і середня кривини поверхні

Література:

1. Атанасян Л.С. Геометрия / Л.С. Атанасян, В.Т, Базылев. Ч.II. – М.: Просвещение, 1987. – 332 с.
2. Синюков Н.С. Топология / Н.С. Синюков, Т.И. Матвиенко. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. – 264 с.

План лекції

6. Головні напрямки поверхні.
7. Головні кривини поверхні.
8. Середня та повна кривини поверхні.
9. Поверхні сталої кривини.

Короткий зміст лекції: поняття головного напрямку поверхні; визначення умов ортогональності та спряженості; умови при яких вектори визначають головні напрямки в точці; теорема про необхідність і достатність головного напрямку; означення головної кривини поверхні; виведення формул головних кривин ; означення середньої та повної кривини поверхні, сталої кривини; приклади сталої кривини з поясненнями.

Основні поняття лекції:

Нехай F_0 −гладка елементарна поверхня, яка задана векторним рівнянням

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v).$$

Головні напрямки індикатриси Дюпена в точці M_0 поверхні F_0 називається *головними напрямками поверхні* в цій точці. В неомбілічній точці поверхні існує єдина пара головних напрямків. В омбілічній точці кожний напрямок є головний.

Згідно з означенням головних напрямків лінії другого порядку вектори $d\vec{r}$ і $\delta\vec{r}$ ортогональні і спряжені відносно індикатриси Дюпена, тому

$d\vec{r}\delta\vec{r} = 0$ −умова ортогональності,

$b_{11}du\delta u + b_{12}du\delta v + b_{21}dv\delta u + b_{22}dv\delta v = 0 -$ умова спряженості.

Для того щоб вектори $d\vec{r}$ і $\delta\vec{r}$ визначали головні напрямки в точці M поверхні F_0, необхідно і достатньо, щоб вони задовольняли умови:

$$d\vec{r}\delta\vec{r} = 0, \quad d\vec{n}\delta\vec{r} = 0.$$

Теорема :

Для того щоб напрямок $\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}$ в точці M поверхні $\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{r}}(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ був головним, необхідно і достатньо, щоб

$$\mathrm{d}\vec{\mathrm{n}} = -\mathrm{k_n}\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}, \quad \text{(формула Родрига)}$$

Де $\mathrm{d}\vec{\mathrm{n}}$ $-$диференціал одиничного вектора нормалі відносно зміщення $\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}$ точки $\mathrm{M}, \mathrm{k_n}$ $-$ нормальна кривина по напрямку $\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}$.

Означення.

1. Нормальні кривини по головним напрямкам в точці M поверхні називаються *головними кривинами поверхні* в цій точці.

Запишемо формулу Родрига так :

$$\overrightarrow{n_u}du + \overrightarrow{n_v}dv = -k(\overrightarrow{r_u}du + \overrightarrow{r_v}dv),$$

де $k -$ нормальна кривина. Помножимо цю рівність скалярно на $\overrightarrow{r_u}$, потім на $\overrightarrow{r_v}$. Згрупувавши члени при du та dv, ми отримаємо :

$$\left.\begin{aligned}(b_{11} - k\gamma_{11})du + (b_{12} - k\gamma_{12})dv = 0,\\ (b_{21} - k\gamma_{21})du + (b_{22} - k\gamma_{22})dv = 0.\end{aligned}\right\}$$

В кожному з рівнянь системи розкриємо дужки :

$$\left.\begin{aligned}b_{11}du - k\gamma_{11}du + b_{12}dv - k\gamma_{12}dv = 0,\\ b_{21}du - k\gamma_{21}du + b_{22}dv - k\gamma_{22}dv = 0.\end{aligned}\right\}$$

Тому далі будемо мати :

$$k(\gamma_{11}du + \gamma_{12}dv) = b_{11}du + b_{12}dv,$$

$$k(\gamma_{21}du + \gamma_{22}dv) = b_{21}du + b_{22}dv.$$

Остання система означає, що вектори

$$\bar{\Gamma}(\gamma_{11}du + \gamma_{12}dv, \gamma_{21}du + \gamma_{22}dv),$$

$$\bar{B}(b_{11}du + b_{12}dv, b_{21}du + b_{22}dv)$$

Колінеарні, а тому за умовою колінеарності векторів маємо рівняння для знаходження головних напрямків :

$$\begin{vmatrix} b_{11}du + b_{12}dv & \gamma_{11}du + \gamma_{12}dv \\ b_{21}du + b_{22}dv & \gamma_{21}du + \gamma_{22}dv \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянувши систему

$$\left.\begin{aligned} (b_{11} - k\gamma_{11})du + (b_{12} - k\gamma_{12})dv = 0, \\ (b_{21} - k\gamma_{21})du + (b_{22} - k\gamma_{22})dv = 0. \end{aligned}\right\}$$

відносно невідомих du, dv. Ця система має ненульовий розв'язок(оскільки $d\vec{r} \neq \vec{0}$,), тому

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k\gamma_{11} & b_{12} - k\gamma_{12} \\ b_{21} - k\gamma_{21} & b_{22} - k\gamma_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$k^2 \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} - \left(\begin{vmatrix} \gamma_{11} & b_{12} \\ \gamma_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & \gamma_{12} \\ b_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} \right) k + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, головні кривини k_1, k_2 в точці $M \ \epsilon F_0$ є корені останнього рівняння.

Означення:

2. Напівсума головних кривин $\mathrm{H} = \frac{\mathrm{k}_1 + \mathrm{k}_2}{2}$ називається *середньою кривиною поверхні в точці M*, а добуток головнихх кривин $\mathrm{K} = \mathrm{k}_1\mathrm{k}_2$ –повною(або гаусовою) кривиною поверхні в точці М.

В еліптичних точках $К > 0$, в гіперболічних точках $К < 0$, в параболічних точках $К = 0$.

3. Поверхня F називається *поверхнею сталої повної (відповідно середньої) кривини*, якщо у всіх точках цієї поверхні $К = \mathrm{const}$ ($Н = \mathrm{const}$).

   Для прикладу розглянемо три поверхні сталої кривини : сферу, псевдосферу, прямий гелікоїд. На рисунках нижче зображені графіки цих поверхонь.

   1. *Сфера.* Як відомо сфера радіуса a в прямокутній системі координат O_{xyz} і з центром в початку координат визначається рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Можна показати, що повна кривина сфери в кожній її точці знаходиться за формулою $K = \frac{1}{a^2}$. Отже, *сфера є приклад поверхні додатної сталої повної кривини.*
   2. *Псевдосфера*. Псевдосферою називається поверхня, яка отримується обертання трактриси, що знаходиться в координатній площині O_{xz}, навколо свої осі O_z. Параметричні рівняння трактриси в площині O_{xz} мають вид :

$$z = a\left(\ln tg\frac{t}{2} + \cos t\right), \quad x = a\sin t, \quad (a = const > 0).$$

Можна показати, що в кожній точці псевдосфери повна кривина дорівнює $K = -\frac{1}{a^2}$. Отже, *псевдосфера є приклад поверхні від'ємної сталої повної кривини.*

3. Прямий гелікоїд. Дана поверхня визначається таким векторним рівнянням :

$$\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + bv\vec{k},$$

де $b > 0$. Можна показати, що повна і середня кривини прямого гелікоїда в кожній його точці обчислюється за формулами :

$$K = \frac{-b^2}{(u^2+b^2)^2}, \quad H = 0.$$

Отже, *прямий гелікоїд є приклад поверхні сталої середньої кривини.* Поверхні, у яких в кожній точці середня кривина дорівнює нулеві, називається *мінімальними.* Можна показати, що зі всіх гладких поверхонь, які обмежені даним замкнутим контуром, мінімальна поверхня має найменшу площу. Таким чином, *прямий гелікоїд є мінімальною поверхнею.*

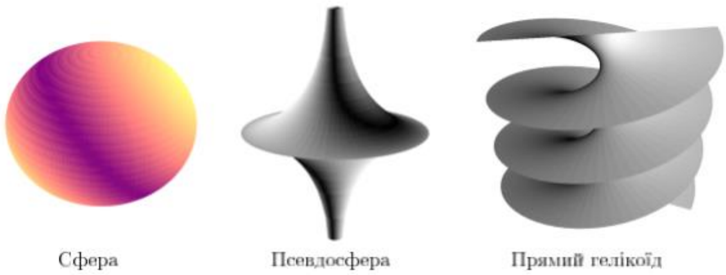

Рис.12.1

Практичне заняття №9 з теми

«Перша квадратична форма поверхні»

Аудиторні завдання :

1. Знайти першу квадратичну форму наступної поверхоні обертання :
    1. $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\sin v$, $z = \varphi(u) -$ верхня обертання з віссю обертання O_z.
    2. $x = R\cos u \cos v$, $y = R\cos u \sin v$, $z = R\sin u$ – сфера.
    3. $x = \mathrm{a}\cos u \cos v$, $y = \mathrm{a}\cos u \sin v$, $z = a\sin u -$ еліпсоїд обертання.
    4. $x = a\,ch\,u\cos v$, $y = a\,ch\,u\sin v$, $z = c\,sh\,u -$ однопорожнинний (однополостный) гіперболоїд обертання.
    5. $x = a\,sh\,u\cos v$, $y = a\,sh\,u\sin v$,$z = c\,ch\,u -$ двопорожнинний гіперболоїд обертання.
    6. $x = u\cos v$, $y = u\,sin\,v$, $z = u^2 -$ параболоїд обертання.

7. $x = R\cos v$, $y = R\sin v$, $z = u -$ круговий циліндр.

2. Знайти першу квадратичну форму гелікоїда загального вигляду

   $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = f(u) + av$.

Для самостійного розв'язання :

1. Знайти першу квадратичну форму наступної поверхоні обертання :
   1. $x = u\cos v$, $y = u\, sin\, v$, $z = ku -$ круговий конус.
   2. $x = (a + b\cos u)\cos v$, $y = (a + b\cos u)\sin v$, $z = b\sin u -$ тор.
   3. $x = a\, ch\, \frac{u}{a}\cos v$, $y = a\, ch\, \frac{u}{a}\sin v$, $z = u -$ катеноїд.
   4. $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$,

      $z = a(\ln tg\, \frac{u}{2} + \cos u) -$ псевдосфера.
2. Знайти першу квадратичну форму прямого гелікоїда

   $x = u\cos v$, $y = usin\, v$, $z = av$.

Практичне заняття №10 з теми
«Друга квадратична форма поверхні»

Аудиторні завдання :

1. Знайти другу квадратичну форму наступної поверхні обертання :
   1. $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\sin v$, $z = \varphi(u) -$ верхня обертання з віссю обертання O_z.
   2. $x = R\cos u\, \cos v$, $y = R\cos u\, \sin v$, $z = R\sin u$ – сфера.
   3. $x = \text{a}\cos u\cos v$, $y = \text{a}\cos u\sin v$, $z = a\sin u -$ еліпсоїд обертання.
   4. $x = a\, ch\, u\cos v$, $y = a\, ch\, u\sin v$, $z = c\, sh\, u -$ однопорожнинний (однополостный) гіперболоїд обертання.
   5. $x = a\, sh\, u\cos v$, $y = a\, sh\, u\sin v$,$z = c\, ch\, u -$ двопорожнинний гіперболоїд обертання.
   6. $x = u\cos v$, $y = u\, sin\, v$, $z = u^2 -$ параболоїд обертання.

7. $x = R\cos v$, $y = R\sin v$, $z = u -$ круговий циліндр.
8. Знайти другу квадратичну форму прямого гелікоїда $x = u\cos v$, $y = u\ sin\ v$, $z = av$.

Для самостійного розв’язання :

1. Знайти другу квадратичну форму наступної поверхні обертання :
   1. $x = u\cos v$, $y = u\ sin\ v$, $z = ku -$ круговий конус.
   2. $x = (a + b\cos u)\cos v$, $y = (a + b\cos u)\sin\ v$, $z = b\sin u -$ тор.
   3. $x = a\ ch\ \frac{u}{a}\cos v$, $y = a\ ch\ \frac{u}{a}\ \sin v$, $z = u -$ катеноїд.
   4. $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$, $z = a(\ln tg\ \frac{u}{2} + \cos u) -$ псевдосфера.